Int. J. Solids Structures, 1975, Vol. 11, pp. 947–960. Pergamon Press. Printed in Gt. Britain.

SUR LE CHAMP DES VITESSES EN THERMOPLASTICITÉ FINIE

B. HALPHEN
Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique, Paris, France

(*Received* 19 *August* 1974)

Abstract—The purpose of this paper is the variational formulation of the rate problem in thermoplasticity or coupled thermoviscoplasticity, when the elastic-plastic transformation is finite. Following Hill's method we show that, for an elastic-plastic material with intermediate relaxed configuration, the nominal stress rate can be derived from a potential function expressed in terms of the gradient of the displacement rate; from this property we derive an extremum principle and a uniqueness criterion for the velocity field.

Résumé—L'objet de cet article est la formulation variationnelle du problème aux limites en vitesses en thermoplasticité ou thermoviscoplasticité couplée, en transformation finie. Suivant la méthode de Hill, nous montrons que pour un matériau élastoplastique à configuration intermédiaire relâchée la vitesse de contrainte nominale dérive d'un potentiel en gradient de la vitesse de déplacement; on en déduit un principe d'extrêmum et un critère d'unicité pour le champ des vitesses.

1. INTRODUCTION

On peut généralement formuler sous deux formes différentes un problème aux limites en mécanique. La première est la formulation locale, qui peut sembler la plus naturelle dans la mesure où elle est la simple juxtaposition de la loi de comportement et des équations générales locales de la mécanique des milieux continus. La seconde est la formulation variationnelle, globale, qui n'existe que pour certaines lois de comportement et qui est liée à des propriétés de convexité de potentiels ou de fonctionnelles. Elle est particulièrement adaptée aux méthodes actuelles de calcul numérique par éléments finis; c'est pourquoi il est indispensable de chercher si une telle formulation existe chaque fois que l'on étudie une nouvelle loi de comportement.

Pour la détermination du champ des vitesses on connaît en élastoplasticité infinitésimale le principe de minimum en vitesse de contrainte de Hodge et Prager et le principe de minimum en vitesse de déplacement de Greenberg. Ces principes ont été récemment étendus à l'élastoviscoplasticité infinitésimale avec déformations plastiques instantanées par Mandel [1] et à la thermoplasticité non couplée par Mroz et Raniecki [2]. En élastoplasticité finie, Hill [3] a établi un principe de minimum en vitesse de déplacement pour une certaine loi d'évolution de la déformation plastique.

Depuis quelques années a été développée par différents auteurs, dont Teodosiu [4], Lee [5], Mandel [1], la théorie du matériau élastoplastique à configuration relâchée; c'est un matériau pour lequel, suivant l'idée d'Eckart [6], la transformation totale est le produit des transformations élastique et plastique. Le but des recherches que nous exposons ici était d'établir pour un tel matériau élastoplastique-viscoplastique la formulation variationnelle du problème aux limites en vitesses.

Hill [7], dont nous rappelons plus bas les principaux résultats, a étudié la classe des matériaux pour lesquels la vitesse de contrainte nominale dérive d'un potentiel en gradient de la vitesse de déplacement. Il a montré comment établir pour de tels matériaux un critère d'unicité en vitesses et un principe d'extrêmum pour le problème aux limites en vitesses.

Nous établissons ici les équations locales en vitesses, en variables eulériennes, en thermoplasticité finie non couplée et en thermoviscoplasticité finie couplée. Nous montrons que les matériaux auxquels nous nous intéressons font partie de la classe des matériaux étudiés par Hill. Nous en déduisons des critères d'unicité en vitesses et des principes de minimum.

2. GENERALITES

2.1 *Rappel des résultats de Hill*

Considérons le tenseur des contraintes dites nominales $\boldsymbol{\theta}$, tenseur de Lagrange relatif à la configuration actuelle. Il est égal au tenseur de contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, mais sa vitesse $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ n'est pas égale à celle du tenseur de Cauchy $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$. Ces deux vitesses sont en effet liées par la relation:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{V}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \operatorname{div} \mathbf{v} \tag{1}$$

dans laquelle $\mathbf{v}$ désigne le vecteur vitesse de déplacement et $\mathbf{V}$ le gradient de la vitesse de déplacement.

Le champ des vitesses de contraintes nominales $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ doit vérifier les équations du mouvement qui en transformation quasistatique s'écrivent:

$$\frac{\partial \dot{\theta}_{ij}}{\partial x_i} + \rho \dot{F}_j = 0 \tag{2}$$

où les $\dot{F}_j$ sont les composantes de la résultante des forces massiques et ρ est le masse volumique actuelle.

Considérons un volume V de matière, de surface ∂V. Etant donné un champ de vitesses de contraintes nominales $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ statiquement admissible, c'est-à-dire vérifiant les équations de l'équilibre (2) et les éventuelles données aux limites en contraintes, et un champ $\mathbf{v}^*$ de vitesses de déplacement cinématiquement admissible, le principe des puissance virtuelles s'écrit:

$$\int_v \dot{\theta}_{ij} v^*_{ji} \, \mathrm{d}\tau = \int_v \rho \dot{F}_i v^*_i \, \mathrm{d}\tau + \int_{\partial v} \dot{T}_i v^*_i \, \mathrm{d}s \tag{3}$$

où les $\dot{T}_i$ sont les composantes des vitesses de forces surfaciques nominales, telles que:

$$\dot{T}_j = n_i \dot{\theta}_{ij} \tag{4}$$

et où les v^*_{ij} sont les composantes du gradient $\mathbf{V}^*$ de la vitesse:

$$v^*_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \tag{5}$$

Hill [7] considère la classe des matériaux pour lesquels la vitesse de contrainte $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ dérive d'un potentiel $U(\mathbf{V})$, c'est-à-dire tels que:

$$\dot{\theta}_{ij} = \frac{\partial U}{\partial v_{ji}}. \tag{6}$$

Soit un volume V d'un tel matériau dont on connaît l'état actuel. Sur la partie S_T de sa surface ∂V on impose des vitesses de forces surfaciques nominales $\dot{\mathbf{T}}^d$, et sur la partie complémentaire S_v de ∂V des vitesses de déplacement $\mathbf{v}^d$. On connaît d'autre part les vitesses $\dot{\mathbf{F}}$ des forces de masse. Le principe des puissances virtuelles (3) associé à la relation (6) permet de montrer que le champ des vitesses de déplacement rend extrêmale la fonctionnelle:

$$J(\mathbf{v}^*) = \int_v U(\mathbf{v}^*) \, \mathrm{d}\tau - \int_v \rho \dot{F}_i v^*_i \, \mathrm{d}\tau - \int_{\partial v} \dot{T}_i^d v^*_i \, \mathrm{d}s. \tag{7}$$

Le principe des puissances virtuelles permet d'autre part de démontrer le critère d'unicité suivant:

Le champ des vitesses est unique si quels que soient les champs de vitesses cinématiquement admissibles $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$, et les vitesses de contraintes $\dot{\boldsymbol{\theta}}^1$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}^2$ associées par la relation (6), on a l'inégalité:

$$\int_v (\dot{\theta}^1_{ij} - \dot{\theta}^2_{ij})(v^1_{ji} - v^2_{ji}) \, \mathrm{d}\tau > 0 \tag{8}$$

qui exprime la convexité de la fonctionnelle J.

Si la critère (8) est vérifié, l'extrêmum de J est un minimum et le champ des vitesses réel minimise la fonctionnelle $J(\mathbf{v}^*)$.

D'une relation du type (6) on peut donc déduire systématiquement un principe de minimum, si la condition (8) de convexité est vérifiée.

Hill[3] a appliqué ces résultats en particulier aux matériaux élastoplastiques répondant à une certaine loi d'évolution de la déformation plastique en transformation finie. Nous les utiliserons ici dans l'étude du problème en vitesses pour les matériaux élastoplastiques et viscoplastiques à configuration intermédiaire relâchée.

2.2 *Cinématique et thermodynamique de la transformation élastoplastique*

Soit (0) la configuration de référence d'un élément de matière sous contrainte nulle à la température T°. Soit (a) sa configuration actuelle dans laquelle $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur de contrainte de Cauchy et T la température absolue. Si, à partir de (a), on décharge instantanément l'élément de matière en la ramenant à la température T°, on obtient une configuration (κ) dite intermédiaire relâchée, définie à une rotation arbitraire près.

Soit $\mathbf{F}$ le gradient de la transformation totale $(0)\rightarrow(a)$. On désigne par $\mathbf{E}$ le gradient de la transformation élastique, qui fait passer de (κ) à (a), et par $\mathbf{P}$ le gradient de la transformation plastique, qui fait passer de (0) à (κ). $\mathbf{F}$ est alors le produit de $\mathbf{E}$ par $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{EP}. \tag{9}$$

Dérivons la relation (9) par rapport au temps et multiplions les deux membres de la relation obtenue par $\mathbf{F}^{-1}$ à droite. On obtient l'expression du gradient de la vitesse de déplacement:

$$\mathbf{V} = \text{grad}\,\mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1} + \mathbf{E}\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{E}^{-1}. \tag{10}$$

On remarque, avec Mandel[1], que chacun des deux termes du second membre de la relation (10) n'a pas de signification intrinsèque et est lié au choix de la configuration relâchée. Nous fixerons plus loin l'orientation de la configuration relâchée et utiliserons les notations suivantes:

$$\mathbf{V}^e = \dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1} \qquad \mathbf{V}^p = \mathbf{E}\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{E}^{-1}. \tag{11}$$

On désignera par $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}^e$, $\mathbf{D}^p$ les parties symétriques de $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}^e$, $\mathbf{V}^p$ respectivement. $\mathbf{D}$ est la vitesse de déformation totale. On appelle $\mathbf{D}^e$ vitesse de déformation élastique et $\mathbf{D}^p$ vitesse de déformation plastique. Entre ces différentes grandeurs, on a les relations suivantes:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^e + \mathbf{V}^p \tag{12}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p. \tag{13}$$

Suivant Zarka[8], Teodosiu[4], Mandel[1], l'état thermodynamique d'un élément de matière est défini par les variables d'état suivantes:

$\boldsymbol{\Delta}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^T\mathbf{E} - \mathbf{I})$, tenseur de déformation de Green de la transformation élastique.

$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_k \mid k = 1, \ldots, n\}$, famille de paramètres internes définissant l'état d'écrouissage du matériau.

T, température absolue.

Comme la configuration relâchée (κ) n'est définie qu'à une rotation arbitraire près, $\boldsymbol{\Delta}^e$, $\boldsymbol{\alpha}$, dépendent de l'orientation de cette configuration et les expressions des fonctions thermodynamiques en dépendent alors généralement aussi. On introduit donc la notion de repère directeur dans la configuration relâchée, repère dans lequel les fonctions thermodynamiques ont une expression fixe en fonction des variables d'état. Dans la suite nous supposerons les configurations relâchées isoclines, c'est-à-dire telles que le trièdre directeur y ait une orientation fixe. Si ϕ désigne alors l'énergie libre spécifique, on peut écrire:

$$\phi = \phi(\boldsymbol{\Delta}^e, \boldsymbol{\alpha}, T). \tag{14}$$

Soit $s(\mathbf{\Delta}^e, \boldsymbol{\alpha}, T)$ l'entropie spécifique et $u(\mathbf{\Delta}^e, \boldsymbol{\alpha}, s)$ l'énergie interne spécifique du matériau. Soit $\boldsymbol{\pi}$ le tenseur de contraintes de Kirchhoff relatif à la configuration relâchée (κ), défini par:

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\rho_\kappa}{\rho}\mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E}^{T-1} \tag{15}$$

où ρ_κ désigne la masse volumique dans la configuration (κ).

L'application de la méthode de Coleman à l'inégalité de Clausius–Duhem permet d'établir les relations suivantes entre grandeurs thermoélastiques:

$$\frac{\boldsymbol{\pi}}{\rho_\kappa} = \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{\Delta}^e} \quad s = -\frac{\partial\phi}{\partial T} \tag{16}$$

Désignons par $H((\boldsymbol{\pi}/\rho_\kappa), \boldsymbol{\alpha}, T)$ l'enthalpie libre spécifique définie par:

$$H = \phi - \frac{\boldsymbol{\pi}}{\rho_\kappa}:\mathbf{\Delta}^e \tag{17}$$

où: désigne la contraction sur deux indices: $(\boldsymbol{\pi}/\rho_\kappa)$: $\mathbf{\Delta}^e = (\pi_{ij}/\rho_\kappa)\Delta^e_{ij}$.

Les relations (16) peuvent être réécrites sous la forme suivante:

$$\mathbf{\Delta}^e = -\frac{\partial H}{\partial\left(\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\rho_\kappa}\right)} \qquad s = -\frac{\partial H}{\partial T} \tag{18}$$

Dans la suite on fera de plus l'hypothèse, qui n'est pas fondamentale pour les démonstrations, mais apporte quelques simplifications dans les calculs, que les coefficients élastiques sont indépendants de l'écrouissage:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\mathbf{\Delta}^e\partial\boldsymbol{\alpha}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial\left(\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\rho_\kappa}\right)\partial\boldsymbol{\alpha}} = 0. \tag{19}$$

2.3 *Relations en vitesses entre grandeurs thermoélastiques*

Nous allons établir ici les relations entre vitesse de déformation élastique, vitesse de contrainte et vitesse de température dont nous aurons besoin par la suite.

Dérivons donc la relation (18) par rapport au temps. On obtient:

$$\dot{\Delta}^e_{ij} = L^0_{ijrs}\left(\dot{\frac{\pi_{rs}}{\rho_\kappa}}\right) + A^0_{ij}\dot{T} \tag{20}$$

où l'on a posé:

$$L^0_{ijrs} = -\frac{\partial^2 H}{\partial\left(\dfrac{\pi_{ij}}{\rho_\kappa}\right)\partial\left(\dfrac{\pi_{rs}}{\rho_\kappa}\right)}, \quad A^0_{ij} = -\frac{\partial^2 H}{\partial\left(\dfrac{\pi_{ij}}{\rho_\kappa}\right)\partial T} \tag{21}$$

et où l'on a tenu compte de la relation (19).

Pour obtenir des relations entre grandeurs eulériennes, exprimons la vitesse $\dot{\mathbf{\Delta}}^e$ en fonction de la vitesse de déformation élastique. La définition de $\mathbf{\Delta}^e$ permet de montrer que:

$$\dot{\mathbf{\Delta}}^e = \mathbf{E}^T\mathbf{D}^e\mathbf{E} \quad \text{ou} \quad \mathbf{D}^e = \mathbf{E}^{T-1}\dot{\mathbf{\Delta}}^e\mathbf{E}^{-1}. \tag{22}$$

D'autre part la dérivation par rapport au temps de la relation (15) de définition du tenseur de Kirchhoff $\boldsymbol{\pi}$ conduit à l'égalité:

$$\left(\frac{\dot{\boldsymbol{\pi}}}{\rho_\kappa}\right) = \mathbf{E}^{-1}\frac{\check{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho}\mathbf{E}^{T-1} \tag{23}$$

où la dérivée $\check{\sigma}$ est définie de la manière suivante:

$$\check{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{V}^e\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}^{eT} + \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}. \tag{24}$$

Cette dérivée est une dérivée au sens de Truesdell lorsque la transformation plastique a lieu sans variation de volume.

Désignons par **L** et **A** les matrices des coefficients élastiques apparents définies par:

$$L_{mnrs} = E_{im}^{-1}E_{jn}^{-1}L_{ijkl}^{0}E_{kr}^{-1}E_{ls}^{-1}$$

et

$$A_{mn} = E_{im}^{-1}A_{ij}^{0}E_{jn}^{-1}. \tag{25}$$

Les relations (22), (23), (25) permettent de transformer la relation (20) et d'obtenir l'expression de la vitesse de déformation élastique en fonction de la vitesse de contrainte et de la vitesse de température sous la forme:

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{L}:\frac{\check{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho} + \mathbf{A}\dot{T}. \tag{26}$$

Nous pouvons inverser cette dernière relation pour exprimer la vitesse de contrainte $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ en fonction de la vitesse de déformation élastique et de la vitesse de température. Soit **K** la matrice inverse de **L** et soit **M** la matrice définie par:

$$\mathbf{M} = -\mathbf{K}:\mathbf{A}. \tag{27}$$

De (26) on déduit alors:

$$\frac{\check{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho} = \mathbf{K}:\mathbf{D}^e + \mathbf{M}\dot{T}. \tag{28}$$

On aurait pu obtenir le même résultat en dérivant la relation (16) par rapport au temps. Compte-tenu de cette remarque et des relations (22), (23), on voit que si l'on pose:

$$K_{ijkl}^{0} = \frac{\partial^2\phi}{\partial\Delta_{ij}^{e}\partial\Delta_{kl}^{e}} \quad \text{et} \quad M_{ij}^{0} = \frac{\partial^2\phi}{\partial\Delta_{ij}^{e}\partial T} \tag{29}$$

les matrices **K** et **M** sont données par:

$$K_{mnpq} = E_{mi}E_{nj}K_{ijkl}^{0}E_{pk}E_{ql} \text{ et } M_{mn} = E_{mi}M_{ij}^{0}E_{nj}. \tag{30}$$

Nous remarquons ici la manière dont la transformation élastique intervient dans l'expression de **K** et **L**. Si la matrice $\mathbf{K}^0$ est constante, c'est-à-dire si le potentiel élastique est quadratique, la matrice **K** n'est constante que dans le cas où la déformation élastique est négligeable (**E** est une rotation) et où le matériau est isotrope dans les configurations relâchées. Notons d'autre part que si $\mathbf{K}^0$ définit une forme quadratique définie positive il en est de même de **K**.

3. THERMOPLASTICITE NON COUPLEE

3.1 *Présentation*

Nous considérons dans cette partie les matériaux élastoviscoplastiques à déformation plastique instantanée en l'absence de couplage thermomécanique. Nous supposons donc que la distribution des températures et leur vitesse dans un volume V de matière sont indépendantes de son évolution mécanique, et sont donc données par l'équation de la chaleur.

Nous cherchons à établir pour les matériaux étudiés ici un principe de minimum en vitesses de déplacement suivant la méthode de Hill rappelée au paragraphe 2.1. Nous devons donc exprimer la vitesse de contrainte nominale $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ en fonction du gradient de la vitesse de déplacement. Comparant les équations (1) et (24), nous notons la relation suivante entre $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ et $\check{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \check{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}^T - (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}^{pT} + \mathbf{V}^p\boldsymbol{\sigma}). \tag{31}$$

Nous commencerons donc par exprimer $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ en fonction du gradient de la vitesse de déplacement et nous en déduirons $\dot{\boldsymbol{\theta}}$.

3.2 *Loi de comportement plastique et viscoplastique*

Pour un matériau élastoviscoplastique à déformation plastique instantanée, le gradient de la vitesse de transformation plastique est la somme d'un terme viscoplastique fonction de l'état actuel du matériau et d'un terme de plasticité instantanée.

Introduisons un nouveau tenseur de contraintes $\boldsymbol{\psi}$ défini par:

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{E}^T\mathbf{E}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\rho_\kappa} = \mathbf{E}^T\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho}\mathbf{E}^{T-1}. \tag{32}$$

On sait que l'on peut généraliser la théorie du potentiel plastique de Hill au cas de la transformation finie, soit comme Mandel[1] à partir d'hypothèses physiques, soit comme Nguyen et Halphen[9] à partir du principe de dissipativité normale. Il existe alors une frontière de plasticité instantanée définie par:

$$f(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\alpha}, T) = 0$$

où f est une fonction convexe de $\boldsymbol{\psi}$; et le gradient de la vitesse de transformation plastique s'écrit:

$$\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{B}^0(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\alpha}, T) + \lambda\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\psi}}\begin{cases}\lambda \geqslant 0 \text{ si } f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0\\ \lambda = 0 \text{ si } f < 0 \text{ ou } \dot{f} < 0\end{cases} \tag{33}$$

où $B^0(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\alpha}, T)$ est la partie viscoplastique de ce gradient.

De même l'évolution des paramètres internes α_k est donnée par une relation de la forme:

$$\dot{\alpha}_k = b_k(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\alpha}, T) + \lambda c_k(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\alpha}, T) \tag{34}$$

où λ a la même valeur que dans la relation (33).

3.3 *Expression de la vitesse de déformation totale en fonction des vitesses de contrainte et de température*

La relation (13) indique que la vitesse de déformation totale $\mathbf{D}$ est la somme de la vitesse de déformation élastique $\mathbf{D}^e$ et de la vitesse de déformation plastique $\mathbf{D}^p$. L'équation (26) nous donne l'expression de $\mathbf{D}^e$ en fonction de $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{T}$. Il nous faut donc exprimer $\mathbf{D}^p$ en fonction de $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{T}$, c'est-à-dire calculer le multiplicateur plastique λ en fonction de ces vitesses, la partie viscoplastique de la vitesse de déformation étant donnée par l'état actuel du matériau.

Considérons donc un point sur la frontière de plasticité instantanée $f = 0$ et supposons qu'il soit en charge plastique, c'est-à-dire que $\dot{f} = 0$, soit:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\psi}} : \dot{\boldsymbol{\psi}} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_k}\dot{\alpha}_k + \frac{\partial f}{\partial T}\dot{T} = 0. \tag{35}$$

Remplaçons dans cette équation $\dot{\alpha}_k$ par l'expression qu'en donne la relation de comportement (34). On en déduit la valeur du multiplicateur plastique λ:

$$\lambda = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\psi}} : \dot{\boldsymbol{\psi}} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} b_k + \frac{\partial f}{\partial T}\dot{T}\right) \tag{36}$$

où $h = -(\partial f / \partial \alpha_k)c_k$ est le module d'écrouissage en plasticité instantanée. Nous supposons dans la suite que l'écrouissage instantané est positif, c'est-à-dire que h est positif.

Il nous faut maintenant calculer $(\partial f / \partial \boldsymbol{\psi})$: $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ en fonction de $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{T}$. Dérivons par rapport au temps la relation (32) qui définit $\boldsymbol{\psi}$. Nous obtenons:

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \frac{1}{\rho}\mathbf{E}^T(\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{V}^{e^T}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}^{e^T} + \boldsymbol{\sigma}\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbf{E}^{T-1}. \tag{37}$$

D'après la définition (24) de $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ nous pouvons écrire l'équation (37) sous la forme:

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \frac{1}{\rho}\mathbf{E}^T(\check{\boldsymbol{\sigma}} + 2\mathbf{D}^e\boldsymbol{\sigma})\mathbf{E}^{T-1}. \tag{38}$$

Remplaçons maintenant $\mathbf{D}^e$ par la valeur qu'en donne la relation (26) en fonction de $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{T}$. Il vient:

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \frac{1}{\rho}\mathbf{E}^T\left[\check{\boldsymbol{\sigma}} + 2\left(\mathbf{L} : \frac{\check{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho}\right)\boldsymbol{\sigma} + 2\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\dot{T}\right]\mathbf{E}^{T-1}. \tag{39}$$

Introduisons maintenant les notations suivantes:

$$n^0_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \psi_{ij}} \text{ et } \mathbf{n} = \mathbf{E}\mathbf{n}^0\mathbf{E}^{-1}. \tag{40}$$

Si on identifie les ψ_{ij} aux composantes d'un vecteur de $\mathbb{R}^9$, les n^0_{ij} sont les composantes de la normale à la frontière de plasticité instantanée dans $\mathbb{R}^9$.

L'équation (39) qui donne la valeur de $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ permet d'écrire:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\psi}} : \dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{n}^0 : \dot{\boldsymbol{\psi}} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n} : \left[\check{\boldsymbol{\sigma}} + 2\left(\mathbf{L} : \frac{\check{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho}\right)\boldsymbol{\sigma} + 2\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}\dot{T}\right]. \tag{41}$$

Or il est facile d'établir que:

$$\mathbf{n} : \left[\left(\mathbf{L} : \frac{\check{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho}\right)\boldsymbol{\sigma}\right] = (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{L} : \frac{\check{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho} \tag{42}$$

et que:

$$\mathbf{n} : (\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{A}. \tag{43}$$

On peut maintenant transformer l'équation (41) en utilisant les relations (42) et (43) et l'écrire sous la forme:

$$\mathbf{n}^0 : \dot{\boldsymbol{\psi}} = \left[\mathbf{n} + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{L}\right] : \frac{\check{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho} + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{A}\dot{T}. \tag{44}$$

Reportons cette valeur dans l'équation (36). Nous obtenons alors l'expression suivante du multiplicateur plastique λ lorsqu'il y a charge plastique:

$$\lambda = \frac{1}{h}\left\{\left[\mathbf{n} + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{L}\right] : \frac{\check{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} b_k + \left[\frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{A} + \frac{\partial f}{\partial T}\right]\dot{T}\right\}. \tag{45}$$

Si un point se trouve sur la frontière de plasticité instantanée, la décharge est caractérisée par $\dot{f} < 0$

et alors $\lambda = 0$. On peut alors donner au multiplicateur plastique λ la forme suivante:

$$\lambda = \frac{1}{h} Y(f) \left\langle \left[\mathbf{n} + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{L} \right] : \frac{\check{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} b_k + \left[\frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{A} + \frac{\partial f}{\partial T} \right] \dot{T} \right\rangle \tag{46}$$

où $\langle x \rangle$ désigne la partie positive du nombre réel x, égale à x si $x \geqslant 0$, à zéro si $x \leqslant 0$, et où $Y(f)$ est définie par:

$$Y(f) = 1 \text{ si } f = 0 \quad Y(f) = 0 \text{ si } f < 0.$$

Posons alors: $\mathbf{B} = \mathbf{E}\mathbf{B}^0\mathbf{E}^{-1}$. Reportons dans la relation (11) de définition de la partie plastique du gradient de la vitesse l'équation (33) dans laquelle on remplace λ par sa valeur donnée par (46), on obtient:

$$\mathbf{V}^p = \mathbf{B} + \frac{1}{h} Y(f) \left\langle \left[\mathbf{n} + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{L} \right] : \frac{\check{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} b_k + \left[\frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{A} + \frac{\partial f}{\partial T} \right] \dot{T} \right\rangle \mathbf{n} \tag{47}$$

Désignant par $\{\mathbf{B}\}$ la partie symétrique de $\mathbf{B}$, on peut alors donner l'expression suivante de la vitesse de déformation totale:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = {} & \mathbf{L} : \frac{\check{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho} + \mathbf{A}\dot{T} + \{\mathbf{B}\} \\ & + \frac{1}{h} Y(f) \{\mathbf{n}\} \left\langle \left[\mathbf{n} + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{L} \right] : \frac{\check{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} b_k + \left[\frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{A} + \frac{\partial f}{\partial T} \right] \dot{T} \right\rangle. \end{aligned} \tag{48}$$

L'équation (48) nous donne, lorsque l'on connaît l'état actuel du matériau la valeur de la vitesse de déformation totale $\mathbf{D}$ en fonction des vitesses de contrainte $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ et de température $\dot{T}$.

3.4 *Expression de la vitesse de contrainte en fonction des vitesses de déformation et de température*

Nous allons maintenant inverser la relation (48) pour obtenir l'expression de la vitesse de contrainte $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ en fonction de la vitesse de déformation totale $\mathbf{D}$ et de la vitesse de température $\dot{T}$. Multipliant les deux membres de l'équation (48) par l'inverse $\mathbf{K}$ de $\mathbf{L}$, on obtient:

$$\frac{\check{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho} = \mathbf{K} : (\mathbf{D} - \mathbf{A}\dot{T} - \mathbf{B}) - \lambda\ \mathbf{K} : \mathbf{n} \tag{49}$$

où les symétries de $\mathbf{K}$ ont permis de remplacer $\{\mathbf{B}\}$ et $\{\mathbf{n}\}$ par $\mathbf{B}$ et $\mathbf{n}$ respectivement.

Il nous faut maintenant calculer le multiplicateur plastique λ en fonction de $\mathbf{D}$ et $\dot{T}$. Supposons que $f = 0$ et qu'il y ait charge plastique $\dot{f} = 0$. Multiplions les deux membres de l'équation (49) par $\mathbf{n} + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{L}$. Compte tenu de l'expression (45) de λ, on obtient:

$$\begin{aligned} h\lambda - \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} b_k - \left[\frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{A} + \frac{\partial f}{\partial T} \right] \dot{T} \\ = \mathbf{n} : \mathbf{K} : (\mathbf{D} - \mathbf{A}\dot{T} - \mathbf{B}) + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : (\mathbf{D} - \mathbf{A}\dot{T} - \mathbf{B}) - \lambda \left(\mathbf{n} : \mathbf{K} : \mathbf{n} + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{n} \right). \end{aligned} \tag{50}$$

D'où on déduit:

$$\lambda = \frac{\mathbf{n} : \mathbf{K} : (\mathbf{D} - \mathbf{A}\dot{T} - \mathbf{B}) + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : (\mathbf{D} - \mathbf{B}) + \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} b_k + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T}}{h + \mathbf{n} : \mathbf{K} : \mathbf{n} + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{n}}. \tag{51}$$

Pour avoir réellement l'expression de λ en fonction des vitesses de déformation et de température, il faut avoir un critère de charge et de décharge en fonction de ces vitesses. La décharge est caractérisée par $\dot{f} < 0$, $\lambda = 0$, ce qui implique:

$$\mathbf{n}^0 : \dot{\boldsymbol{\psi}} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} b_k + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} < 0. \tag{52}$$

En décharge, la déformation est élastoviscoplastique. La vitesse de déformation $\mathbf{D}$ est alors donnée par l'équation (48) où l'on fait $Y(f) = 0$. On peut alors inverser cette dernière équation sous la forme:

$$\frac{\check{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho} = \mathbf{K} : (\mathbf{D} - \mathbf{A}\dot{T} - \mathbf{B}). \tag{53}$$

Reportant alors cette équation dans la relation (44) qui donne l'expression de $\mathbf{n}^0 : \dot{\boldsymbol{\psi}}$, la condition de décharge (52) s'écrit:

$$\mathbf{n} : \mathbf{K} : (\mathbf{D} - \mathbf{A}\dot{T} - \mathbf{B}) + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : (\mathbf{D} - \mathbf{B}) + \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} b_k + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} < 0. \tag{54}$$

Le multiplicateur λ étant positif ou nul, on voit que, sous la restriction:

$$h + \mathbf{n} : \mathbf{K} : \mathbf{n} + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{n} > 0 \tag{55}$$

l'inégalité (54) caractérise la décharge. On a alors:

$$\lambda = Y(f) \frac{\left\langle \mathbf{n} : \mathbf{K} : (\mathbf{D} - \mathbf{A}\dot{T} - \mathbf{B}) + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : (\mathbf{D} - \mathbf{B}) + \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} b_k + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} \right\rangle}{h + \mathbf{n} : \mathbf{K} : \mathbf{n} + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{n}}. \tag{56}$$

L'équation (49) permet alors de connaître l'expression de la vitesse de contrainte $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ en fonction des vitesses de déformation $\mathbf{D}$ et de température $\dot{T}$:

$$\begin{aligned} \frac{\check{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho} &= \mathbf{K} : (\mathbf{D} - \mathbf{A}\dot{T} - \mathbf{B}) \\ &\quad - \mathbf{K} : \mathbf{n}\, Y(f) \frac{\left\langle \mathbf{n} : \mathbf{K} : (\mathbf{D} - \mathbf{A}\dot{T} - \mathbf{B}) + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : (\mathbf{D} - \mathbf{B}) + \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} b_k + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} \right\rangle}{h + \mathbf{n} : \mathbf{K} : \mathbf{n} + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{n}}. \end{aligned} \tag{57}$$

L'inégalité (55) est une condition nécessaire sur l'état actuel du matériau pour pouvoir distinguer la charge plastique de la décharge en fonction de la vitesse de déformation totale $\mathbf{D}$. C'est alors une condition nécessaire pour pouvoir exprimer la vitesse de contrainte $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ en fonction de $\mathbf{D}$.

Si on suppose que $\mathbf{K}$ est une matrice définie positive, on est sûr que:

$$h + \mathbf{n} : \mathbf{K} : \mathbf{n} > 0. \tag{58}$$

C'est donc le troisième terme du premier membre de l'inégalité (55) qui peut le rendre négatif. Notons qu'avec la loi de comportement en transformation finie qu'il avait choisie, Hill [3] trouvait une condition du type (58), identique à celle que l'on trouve en petite transformation, et que l'on pouvait supposer toujours vérifiée.

Nous supposons dans la suite que l'inégalité (55) est vérifiée, et donc que l'on peut écrire la relation (57), partout dans le volume V de matière que l'on considèrera.

3.5 *Unicité et principe d'extremum en thermoplasticité non couplée*

Connaissant l'expression de la vitesse de contrainte $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ et du multiplicateur plastique λ, c'est-à-dire de la partie plastique du gradient de la vitesse, en fonction de la vitesse de déformation

$\mathbf{D}$ et de la vitesse de température $\dot{T}$, nous sommes en mesure de calculer la vitesse de contrainte nominale $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ en fonction du gradient de la vitesse de déplacement. La relation (31) entre $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ et $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ et les équations (56) et (57) permettent d'écrire:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \rho\mathbf{K}:(\mathbf{D}-\mathbf{A}\dot{T}-\mathbf{B})+\boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}^T-(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}^T+\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma})$$
$$-(\rho\mathbf{K}:\mathbf{n}+\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}^T+\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})Y(f)\frac{\left\langle \mathbf{n}:\mathbf{K}:(\mathbf{D}-\mathbf{A}\dot{T}-\mathbf{B})+\dfrac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}):(\mathbf{D}-\mathbf{B})+\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_k}b_k+\dfrac{\partial f}{\partial T}\dot{T}\right\rangle}{h+\mathbf{n}:\mathbf{K}:\mathbf{n}+\dfrac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}):\mathbf{n}}. \tag{59}$$

Grâce aux symétries des différents tenseurs qui interviennent dans l'expression de $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, on peut écrire la relation (59) sous la forme:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{ij} = \frac{\partial U}{\partial v_{ji}} \tag{60}$$

$U(\mathbf{V})$ étant défini par:

$$U = \frac{\rho}{2}(\mathbf{D}-\mathbf{A}\dot{T}-\mathbf{B}):\mathbf{K}:(\mathbf{D}-\mathbf{A}\dot{T}-\mathbf{B})+\frac{1}{2}\sigma_{ir}v_{jr}v_{ji}-(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}^T+\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}):\mathbf{D}$$
$$-\frac{\rho}{2}Y(f)\frac{\left\langle \mathbf{n}:\mathbf{K}:(\mathbf{D}-\mathbf{A}\dot{T}-\mathbf{B})+\dfrac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}):(\mathbf{D}-\mathbf{B})+\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_k}b_k+\dfrac{\partial f}{\partial T}\dot{T}\right\rangle^2}{h+\mathbf{n}:\mathbf{K}:\mathbf{n}+\dfrac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}):\mathbf{n}}. \tag{61}$$

Comme, d'après la relation (60), la vitesse de contrainte nominale $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ dérive d'un potentiel en gradient de la vitesse de déplacement, on peut utiliser les résultats de Hill rappelés au paragraphe 2.1.

La solution du problème aux limites en vitesses de déplacement rend extrêmale la fonctionnelle $J(\mathbf{v}^*)$ définie par l'équation (7).

Si la condition (8) de convexité de la fonctionnelle $J(\mathbf{v}^*)$ est vérifiée, la solution unique du problème en vitesses rend $J(\mathbf{v}^*)$ minimale.

Pour expliciter la condition (8), qui nous donne une condition suffisante d'unicité de la solution du problème en vitesses, il faut distinguer pour chacun des deux champs de vitesses $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$ cinématiquement admissibles envisagés quelles sont les zônes du volume V en charge ou en décharge plastique. Pour éviter de faire cette distinction, nous allons, comme l'a fait Hill[3], déduire du critère (8) un critère d'unicité plus faible, c'est-à-dire condition suffisante pour que le critère (8) soit vérifié.

Remarquons d'abord que:

$$(\langle x^1\rangle-\langle x^2\rangle)(x^1-x^2)\leqslant(x^1-x^2)^2 \tag{62}$$

Cette inégalité entraîne que:

$$\int_v(\dot{\theta}^1_{ij}-\dot{\theta}^2_{ij})(v^1_{ji}-v^2_{ji})\,\mathrm{d}\tau \geqslant \int_v\left\{\rho\,\Delta\mathbf{D}:\mathbf{K}:\Delta\mathbf{D}+\sigma_{ir}\Delta v_{jr}\Delta v_{ji}\right.$$
$$\left.-\rho\frac{\left[\mathbf{n}:\mathbf{K}:\Delta\mathbf{D}+\dfrac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}):\Delta\mathbf{D}\right]^2}{h+\mathbf{n}:\mathbf{K}:\mathbf{n}+\dfrac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\mathbf{n}}\right\}\mathrm{d}\tau \tag{63}$$

où $\Delta\mathbf{D}=\mathbf{D}^1-\mathbf{D}^2$, $\Delta\mathbf{v}=\mathbf{v}^1-\mathbf{v}^2$

On en déduit alors le critère d'unicité suivant:

La solution du problème aux limites en vitesses de déplacement est unique si quels que soient les champs de vitesses $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$, cinématiquement admissibles, l'inégalité suivante est vérifiée:

$$\int_v \left\{ \rho\, \Delta\mathbf{D}:\mathbf{K}:\Delta\mathbf{D} + \sigma_{ir}\Delta v_{jr}\Delta v_{ji} - \rho \frac{\left[\mathbf{n}:\mathbf{K}:\Delta\mathbf{D} + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}):\Delta\mathbf{D}\right]^2}{h + \mathbf{n}:\mathbf{K}:\mathbf{n} + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}):\mathbf{n}} \right\} \mathrm{d}\tau > 0. \tag{64}$$

Notons que ce dernier critère d'unicité (64) ne contient ni termes viscoplastiques, ni termes thermiques. Il s'applique donc dans tous les cas de plasticité sans couplage thermomécanique, avec ou sans déformation viscoplastique, isotherme ou non.

3.6 *Cas particuliers*

(a) *Plasticité isotherme.* Considérons un matériau élastoplastique, à température constante, sans déformations viscoplastiques. Pour un tel matériau, le potentiel U a la forme suivante:

$$U = \frac{\rho}{2}\mathbf{D}:\mathbf{K}:\mathbf{D} + \frac{1}{2}\sigma_{ir}v_{jr}v_{ji} - \frac{\rho}{2}\frac{\left\langle \mathbf{n}:\mathbf{K}:\mathbf{D} + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}):\mathbf{D}\right\rangle^2}{h + \mathbf{n}:\mathbf{K}:\mathbf{n} + \frac{2}{\rho}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}):\mathbf{n}} \tag{65}$$

(b) *Viscoplasticité isotherme.* Considérons un matériau élastoviscoplastique, sans déformations plastiques instantanées, à température constante. Le potentiel U de ce matériau a la forme suivante:

$$U = \frac{\rho}{2}(\mathbf{D} - \mathbf{B}):\mathbf{K}:(\mathbf{D} - \mathbf{B}) + \frac{1}{2}\sigma_{ir}v_{jr}v_{ji} - (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}^T + \mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}):\mathbf{D}. \tag{66}$$

Le critère (8) de convexité de $J(\mathbf{v}^*)$ s'écrit alors:

$$\int_v [\rho\, \Delta\mathbf{D}:\mathbf{K}:\Delta\mathbf{D} + \sigma_{ir}\Delta v_{jr}\Delta v_{ji}]\, \mathrm{d}\tau > 0. \tag{67}$$

Ce critère est identique à celui que l'on trouve en élasticité finie. Il faut cependant rappeler que (67) n'est qu'une condition suffisante d'unicité de la solution du problème en vitesses de déplacement; on ne peut donc pas affirmer qu'il y a équivalence entre l'unicité en vitesses en viscoplasticité et en élasticité.

4. THERMOVISCOPLASTICITE COUPLEE

4.1 *Présentation*

Nous considérons maintenant un matériau élastoviscoplastique sans déformations plastiques instantanées. Conformément à l'équation de conservation de l'énergie, nous tenons compte du couplage entre effets thermiques et effets mécaniques.

Pour évaluer la vitesse de contrainte nominale $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, nous commencerons comme précédemment par calculer la vitesse de contrainte $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ en fonction de la vitesse de déformation totale $\mathbf{D}$. La relation thermoélastique (28) nous permet d'écrire:

$$\frac{\check{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho} = \mathbf{K}:(\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) + \mathbf{M}\dot{T} \tag{68}$$

Pour un matériau viscoplastique, la partie plastique $\mathbf{V}^p$ du gradient de la vitesse et donc sa partie symétrique $\mathbf{D}^p$ sont données par l'état actuel du matériau; l'équation (33) s'écrit:

$$\mathbf{V}^p = \mathbf{B}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\alpha}, T) \tag{69}$$

Pour calculer $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ en fonction de $\mathbf{D}$, il ne nous reste donc qu'à calculer la vitesse de température $\dot{T}$.

4.2. *Calcul de la vitesse de température*

Les relations (16) entre grandeurs thermoélastiques permettent de transformer l'équation de l'énergie et de la mettre sous la forme:

$$T\dot{s} = tr\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\rho_\kappa}\mathbf{E}^T\mathbf{E}\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}\right) - \frac{\partial\phi}{\partial\alpha_k}\dot{\alpha}_k - \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{q} \tag{70}$$

q désignant le vecteur flux de chaleur.

La relation (15) qui définit $\boldsymbol{\pi}$ en fonction de $\boldsymbol{\sigma}$ et la deuxième relation (16) permettent de réécrire l'équation (70) sous la forme suivante:

$$-T\frac{\partial^2\phi}{\partial T^2}\dot{T} - T\frac{\partial^2\phi}{\partial T\partial\Delta^e_{ij}}\dot{\Delta}^e_{ij} - T\frac{\partial^2\phi}{\partial T\partial\alpha_k}\dot{\alpha}_k = \frac{\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}^p}{\rho} - \frac{\partial\phi}{\partial\alpha_k}\dot{\alpha}_k - \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{q}. \tag{71}$$

Introduisons alors les notations suivantes:

$$c = -T\frac{\partial^2\phi}{\partial T^2},\ N_k = \frac{\partial\phi}{\partial\alpha_k} - T\frac{\partial^2\phi}{\partial\alpha_k\partial T}. \tag{72}$$

c est la chaleur spécifique à déformation élastique et écrouissage constant. Remarquant d'autre part que:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial T\partial\Delta^e_{ij}}\dot{\Delta}^e_{ij} = \mathbf{M}^0:\dot{\boldsymbol{\Delta}}^e = \mathbf{M}:\mathbf{D}^e \tag{73}$$

on peut écrire l'équation (71) sous la forme:

$$\dot{T} = \frac{1}{c}\left[T\mathbf{M}:\mathbf{D}^e - N_k b_k + \frac{\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}^p}{\rho} - \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{q}\right]. \tag{74}$$

On a ainsi exprimé la vitesse de température en fonction de la vitesse de déformation élastique et de l'état actuel du matériau, c'est-à-dire en fonction de la vitesse de déformation totale et de l'état actuel du matériau:

$$\dot{T} = \frac{1}{c}\left[T\mathbf{M}:(\mathbf{D}-\mathbf{D}^p) - N_k b_k + \frac{\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}^p}{\rho} - \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{q}\right]. \tag{75}$$

Notons que $\dot{T}$ n'est donnée par cette équation (75) qu'à l'intérieur d'un volume V de matière, et non sur sa frontière ∂V. Sur ∂V, $\dot{T}$ est liée aux conditions aux limites thermiques.

4.3 *Vitesse de contrainte nominale. Unicité et principe d'extremum en vitesses*

Reportons dans l'équation (68) la valeur de $\dot{T}$ donnée par (75); on obtient:

$$\frac{\check{\boldsymbol{\sigma}}}{\rho} = (\mathbf{K}+\mathbf{S}):(\mathbf{D}-\mathbf{D}^p) + \frac{1}{c}\mathbf{M}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}^p}{\rho} - N_k b_k - \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{q}\right) \tag{76}$$

où la matrice **S** est définie par:

$$S_{mnpq} = \frac{T}{c}M_{mn}M_{pq}. \tag{77}$$

La relation (31) entre la vitesse de contrainte nominale $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ et la vitesse de contrainte $\check{\boldsymbol{\sigma}}$ permet alors de calculer $\dot{\boldsymbol{\theta}}$:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \rho(\mathbf{K}+\mathbf{S}):(\mathbf{D}-\mathbf{D}^p) + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}^T - (\mathbf{V}^p\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}^{pT}) + \frac{\mathbf{M}}{c}(\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}^p - \rho N_k b_k - \operatorname{div}\mathbf{q}). \tag{78}$$

Cette dernière équation montre qu'ici encore la vitesse de contrainte nominale $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ dérive d'un potentiel U en gradient de la vitesse de déplacement:

$$\dot{\theta}_{ij} = \frac{\partial U}{\partial v_{ji}} \tag{79}$$

le potentiel U étant donné par:

$$U = \frac{\rho}{2}\mathbf{D}:(\mathbf{K}+\mathbf{S}):\mathbf{D} + \frac{1}{2}\sigma_{ir}v_{jr}v_{ji}$$
$$-\mathbf{D}:\left[\rho(\mathbf{K}+\mathbf{S}):\mathbf{D}^p + \mathbf{V}^p\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}^{pT} - \frac{\mathbf{M}}{c}(\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}^p - \rho N_k b_k - \operatorname{div}\mathbf{q})\right]. \tag{80}$$

On retrouve évidemment le potentiel que l'on a trouvé au paragraphe 3. pour un matériau élastoviscoplastique sans déformations plastiques instantanées en l'absence de couplage thermomécanique en supprimant la matrice de couplage **S** et les termes de dissipation $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{D}^p - \rho N_k b_k$. Le terme en div **q** vient alors de l'expression de $\dot{T}$ donnée par l'équation de la chaleur.

La relation (79) permet d'affirmer que la solution du problème aux limites en vitesses rend la fonctionnelle $J(\mathbf{v}^*)$ définie par l'équation (7) extrêmale, et minimale si J est convexe.

Le critère de convexité (8), qui est aussi une condition suffisante d'unicité de la solution du problème en vitesses, s'écrit ici:

$$\int_v [\rho\,\Delta\mathbf{D}:(\mathbf{K}+\mathbf{S}):\Delta\mathbf{D} + \sigma_{ir}\Delta v_{jr}\Delta v_{ji}]\,\mathrm{d}\tau > 0 \tag{81}$$

quels que soient les champs de vitesses $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$ cinématiquement admissibles, $\Delta\mathbf{v}$ désignant leur différence.

Le critère d'unicité (81) est le même que celui que l'on obtiendrait par la même méthode en thermoélasticité finie. On note que la matrice S étant définie positive, la condition suffisante d'unicité donnée par la convexité de la fonctionnelle J est plus facilement vérifiée lorsqu'on tient compte du couplage thermomécanique que lorsqu'on n'en tient pas compte.

5. CONCLUSION

Nous avons établi un principe d'extrêmum en vitesses de déplacement pour un matériau élastoviscoplastique à déformation plastique instantanée sans couplage thermomécanique et pour un matériau élastoviscoplastique avec couplage thermomécanique.

Considérons maintenant le problème de l'évolution d'un volume de matière pour certaines conditions aux limites. Un principe de minimum tel que ceux que nous avons établis permet à un instant t de déterminer numériquement le champ des vitesses de déplacement. Il est facile de voir que, connaissant ce champ, on peut calculer la vitesse de contrainte nominale $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, la vitesse de la transformation plastique et de la transformation élastique, la vitesse des paramètres internes et de la température.

Utilisant les conditions aux limites thermiques pour calculer la température, on peut alors déterminer l'état du matériau à l'instant $t + \mathrm{d}t$. Finalement les principes d'extrêmum que nous avons établis permettent de résoudre numériquement un problème d'évolution thermoplastique en transformation finie.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Mandel, Plasticité Classique et Viscoplasticité Cours au CISM, Udine 1971 Springer Verlag Ed.
2. Z. Mroz and B. Raniecki, Variational principles in uncoupled thermoplasticity. *Int. J. of Engng Sci.* **11**, 1133 (1973).
3. R. Hill, A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. of Solids.* **6**, 236 (1958).
4. C. Teodosiu, A dynamic theory of dislocations and its applications to the theory of the elastic-plastic continuum. In *Fundamental Aspects of Dislocation Theory.* Edited by S. A. Simmond, R. de Wit and R. Bullough (1970).

5. E. H. Lee, Elastic-plastic deformation at finite strains. *J. Applied Mech.* **36**, 1 (1969).
6. C. Eckart, Theory of elasticity and anelasticity. *Phys. Rev.* **73**, 373 (1948).
7. R. Hill, Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time. *J. Mech. Phys. Solids.* **7**, 209 (1959).
8. J. Zarka, Sur la viscoplasticité des métaux. Thèse Paris 1968.
9. Q. S. Nguyen et B. Halphen, Sur les lois de comportement élastoviscoplastique à potentiel généralisé. *C. R. Acad. Sc. Paris*, **277**, A319 (1973).